Gegeben sei folgendes Transportproblem:

Von einem homogenen Gut seien folgende Mengen vorrätig:

Lager 1	8 Einheiten
Lager 2	10 Einheiten
Lager 3	12 Einheiten

Davon sollen die folgenden nachgefragten Mengen befriedigt werden:

Empfänger 1	7 Einheiten
Empfänger 2	8 Einheiten
Empfänger 3	9 Einheiten
Empfänger 4	12 Einheiten

Die Transportkosten je Einheit betragen

	Empfänger 1	Empfänger 2	Empfänger 3	Empfänger 4
Lager 1	30	60	70	10
Lager 2	15	70	55	20
Lager 3	45	35	20	30

a) Ermitteln Sie eine Startlösung mittels Nord-West-Ecken-Regel
a) Ermitteln Sie eine Startlösung mittels Matrix-Minimum-Regel
a) Ermitteln Sie eine Startlösung mittels VOGELscher Approximationsmethode

Durch Addition der oben stehenden Mengen sehen wir, dass insgesamt 30 Einheiten angeboten werden, aber 36 Einheiten nachgefragt werden.

Das bedeutet, dass wir einen fiktiven Anbieter "Restmenge" einfügen müssen, der die Über-Nachfrage von 6 Einheiten "liefert".

Die Transportkosten hierfür setzen wir auf einen Wert, der größer ist als alle bisher genannten Kosten, also beispielsweise auf 100 Geldeinheiten je Transporteinheit.

Damit erhalten wir das "Leertableau":

Rot: Kosten
Schwarz: Mengen

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 8	30	60	70	10
Lager 2 10	15	70	55	20
Lager 3 12	45	35	20	30
Rest 6	100	100	100	100

a) Nord-West-Ecken-Regel:

	E1 ~~7~~ X	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 ~~8~~ 1	7 30	60	70	10
Lager 2 10	15	70	55	20
Lager 3 12	45	35	20	30
Rest 6	100	100	100	100

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ 7	E3 9	E4 12
Lager 1 ~~8~~ ~~1~~ X	7 30	1 60	70	10
Lager 2 10	15	70	55	20
Lager 3 12	45	35	20	30
Rest 6	100	100	100	100

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ ~~7~~ X	E3 9	E4 12
Lager 1 ~~8~~ ~~1~~ X	7 30	1 60	70	10
Lager 2 ~~10~~ 3	15	7 70	55	20
Lager 3 12	45	35	20	30
Rest 6	100	100	100	100

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ ~~7~~ X	E3 ~~9~~ 6	E4 12
Lager 1 ~~8~~ ~~1~~ X	7 30	1 60	70	10
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	15	7 70	3 55	20
Lager 3 12	45	35	20	30
Rest 6	100	100	100	100

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ ~~7~~ X	E3 ~~9~~ ~~6~~ X	E4 12
Lager 1 ~~8~~ ~~1~~ X	7 30	1 60	70	10
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	15	7 70	3 55	20
Lager 3 ~~12~~ 6	45	35	6 20	6 30
Rest 6	100	100	100	6 100

Kosten NWE: 1845

b) Matrix-Minimum-Verfahren

Leertableau:

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 8	30	60	70	10
Lager 2 10	15	70	55	20
Lager 3 12	45	35	20	30
Rest 6	100	100	100	100

minimale Kosten: 10

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 ~~12~~ 4
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10
Lager 2 10	15	70	55	20
Lager 3 12	45	35	20	30
Rest 6	100	100	100	100

minimale Kosten: 15

	E1 ~~7~~ X	E2 8	E3 9	E4 ~~12~~ 4
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10
Lager 2 ~~10~~ 3	7 15	70	55	20
Lager 3 12	45	35	20	30
Rest 6	100	100	100	100

minimale Kosten: 20

Diese Kosten von 20 werden in zwei Relationen angenommen.

Grundsätzlich kann man sich nun eine der drei Relationen aussuchen.

Wir wählen die Relation, bei der wir die größte Menge transprotieren können:
Lager 3 - Empfänger 3 mit 9 Einheiten.

	E1 ~~7~~ X	E2 8	E3 ~~9~~ X	E4 ~~12~~ 4
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10
Lager 2 ~~10~~ 3	7 15	70	55	20
Lager 3 ~~12~~ 3	45	35	9 20	30
Rest 6	100	100	100	100

minimale Kosten: 20

	E1 ~~7~~ X	E2 8	E3 ~~9~~ X	E4 ~~12~~ 4 1
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	7 15	70	55	3 20
Lager 3 ~~12~~ 3	45	35	9 20	30
Rest 6	100	100	100	100

minimale Kosten: 30

	E1 ~~7~~ X	E2 8	E3 ~~9~~ X	E4 ~~12~~ 4 ~~1~~ X
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	7 15	70	55	3 20
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ 2	45	35	9 20	1 30
Rest 6	100	100	100	100

Die verbleibenden Mengen können nun einfach verteilt werden:

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ X	E3 ~~9~~ X	E4 ~~12~~ ~~4~~ ~~1~~ X
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	7 15	70	55	3 20
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ ~~2~~ X	45	2 35	9 20	1 30
Rest ~~6~~ X	100	6 100	100	100

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ X	E3 ~~9~~ X	E4 ~~12~~ ~~4~~ ~~1~~ X
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	7 15	70	55	3 20
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ ~~2~~ X	45	2 35	9 20	1 30
Rest ~~6~~ X	100	6 100	100	100

Kosten MMV: 1088

Vergleich
Kosten NWE: 1845

c) VOGEL-Approximation:

Leertableau:

	E1 7	E2 8	E3 9	E 4 12	Δ
Lager 1 8	30	60	70	10	
Lager 2 10	15	70	55	20	
Lager 3 12	45	35	20	30	
Rest 6	100	100	100	100	
Δ					

maximale Differenz: 35

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 7	E2 8	E3 9	E 4 12	Δ
Lager 1 8	30	60	70	10	20
Lager 2 10	15	70	55	20	5
Lager 3 12	45	35	20	30	10
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ	15	25	35	10	

minimale Kosten der markierten Felder: 20

Über die gefundene Relation L3 - E3 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 9

	E1 7	E2 8	E3 ~~9~~ X	E 4 12	Δ
Lager 1 8	30	60	70	10	20
Lager 2 10	15	70	55	20	5
Lager 3 ~~12~~ 3	45	35	9 20	30	5
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ	15	25		10	

maximale Differenz: 25

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 7	E2 8	E3 ~~9~~ X	E 4 12	Δ
Lager 1 8	30	60	70	10	20
Lager 2 10	15	70	55	20	5
Lager 3 ~~12~~ 3	45	35	9 20	30	5
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ	15	25		10	

minimale Kosten der markierten Felder: 35

Über die gefundene Relation L3 - E2 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 3

	E1 7	E2 ~~8~~ 5	E3 ~~9~~ X	E 4 12	Δ
Lager 1 8	30	60	70	10	20
Lager 2 10	15	70	55	20	5
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30	
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ	15	10		10	

maximale Differenz: 20

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 7	E2 ~~8~~ 5	E3 ~~9~~ X	E 4 12	Δ
Lager 1 8	30	60	70	10	20
Lager 2 10	15	70	55	20	5
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30	
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ	15	10		10	

minimale Kosten der markierten Felder: 10

Über die gefundene Relation L1 - E4 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 8

	E1 7	E2 ~~8~~ 5	E3 ~~9~~ X	E 4 ~~12~~ 4	Δ
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10	
Lager 2 10	15	70	55	20	5
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30	
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ	85	30		80	

maximale Differenz: 85

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 7	E2 ~~8~~ 5	E3 ~~9~~ X	E 4 ~~12~~ 4	Δ
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10	
Lager 2 10	15	70	55	20	5
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30	
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ	85	30		80	

minimale Kosten der markierten Felder: 15

Über die gefundene Relation L2 - E1 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 7

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ 5	E3 ~~9~~ X	E 4 ~~12~~ 4	Δ
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10	
Lager 2 ~~10~~ 3	7 15	70	55	20	50
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30	
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ		30		80	

maximale Differenz: 80

Wir suchen nun das Feld mit den minimalen Kosten in allen Reihen mit dieser maximalen Differenz:

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ 5	E3 ~~9~~ X	E 4 ~~12~~ 4	Δ
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10	
Lager 2 ~~10~~ 3	7 15	70	55	20	50
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30	
Rest 6	100	100	100	100	0
Δ		30		80	

minimale Kosten der markierten Felder: 20

Über die gefundene Relation L2 - E4 transportieren wir die maximal mögliche Menge: 3

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ 5	E3 ~~9~~ X	E 4 ~~12~~ 4 1	Δ
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10	
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	7 15	70	55	3 20	
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30	
Rest 6	100	100	100	100	
Δ					

Die verbleibende Menge können wir nun einfach verteilen:

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ ~~5~~ X	E3 ~~9~~ X	E 4 ~~12~~ ~~4~~ ~~1~~ X	Δ
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10	
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	7 15	70	55	3 20	
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30	
Rest ~~6~~ X	100	5 100	100	1 100	
Δ					

Schlußtableau:

	E1 ~~7~~ X	E2 ~~8~~ ~~5~~ X	E3 ~~9~~ X	E 4 ~~12~~ ~~4~~ ~~1~~ X
Lager 1 ~~8~~ X	30	60	70	8 10
Lager 2 ~~10~~ ~~3~~ X	7 15	70	55	3 20
Lager 3 ~~12~~ ~~3~~ X	45	3 35	9 20	30
Rest ~~6~~ X	100	5 100	100	1 100

Kosten VOGEL: 1093

Vergleich:
MMV 1088

NWE 1845

Hier haben wir den seltenen Fall, dass die VOGEL-Approximation eine schlechtere Ausgangslösung bietet, wie das Matrix-Minimum-Verfahren.

Nachoptimierung mittels MoDi-Verfahren.

Dazu starten wir mit der Lösung, die wir bei der VOGEL-Approximation erhalten haben:

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 8	30	60	70	8 10
Lager 2 10	7 15	70	55	3 20
Lager 3 12	45	3 35	9 20	30
Rest 6	100	5 100	100	1 100

aktuelle Kosten: 1093

Phase 1: Wir betrachten die besetzten Felder und berechnen die Hilfsgrößen:

c14 - z1 - s4 = 0	10 - z1 - s4 = 0
c21 - z2 - s1 = 0	15 - z2 - s1 = 0
c24 - z2 - s4 = 0	20 - z2 - s4 = 0
c32 - z3 - s2 = 0	35 - z3 - s2 = 0
c33 - z3 - s3 = 0	20 - z3 - s3 = 0
c42 - z4 - s2 = 0	100 - z4 - s2 = 0
c44 - z4 - s4 = 0	100 - z4 - s4 = 0

Wählt man nun beispielsweise z2 = 0 so erhält man

z1 =	-10	s1 =	15
z2 =	0	s2 =	20
z3 =	15	s3 =	5
z4 =	80	s4 =	20

Phase 2: Wir betrachten die freien Felder und berechnen die Kosteneinsparpotentiale:

c11 - z1 - s1 =	30 - (-10) - 15	25
c12 - z1 - s2 =	60 - (-10) - 20	50
c13 - z1 - s3 =	70 - (-10) - 5	75
c22 - z2 - s2 =	70 - 0 - 20	50
c23 - z2 - s3 =	55 - 0 - 5	50
c31 - z3 - s1 =	45 - 15 - 15	15
c34 - z3 - s4 =	30 - 15 - 20	-5
c41 - z4 - s1 =	100 - 80 - 15	5
c43 - z4 - s3 =	100 - 80 - 5	15

Wir suchen nun den kleinsten negativen Wert dieser Einsparpotentiale: -45

In diese Relation L3 - E4 setzen wir "+ T" für die noch zu bestimmende Transportmenge, die über diese Relation transportiert werden soll:

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 8	30	60	70	8 10
Lager 2 10	7 15	70	55	3 20
Lager 3 12	45	3 35	9 20	+ T 30
Rest 6	100	5 100	100	1 100

Um die Transportbilanz von L3 zu korrigieren, sschreiben wir "- T" in der E2-Spalte:

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 8	30	60	70	8 10
Lager 2 10	7 15	70	55	3 20
Lager 3 12	45	3 - T 35	9 20	+ T 30
Rest 6	100	5 100	100	1 100

und weiter:

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 8	30	60	70	8 10
Lager 2 10	7 15	70	55	3 20
Lager 3 12	45	3 - T 35	9 20	+ T 30
Rest 6	100	5 + T 100	100	1 100

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 8	30	60	70	8 10
Lager 2 10	7 15	70	55	3 20
Lager 3 12	45	3 - T 35	9 20	+ T 30
Rest 6	100	5 + T 100	100	1 - T 100

Diese Menge ist die kleinste Menge, die aktuell in den Relationen eingetragen ist, bei denen mit "- T" eine Transportmenge abzuziehen ist (denn sonst würde es irgendwo negative Transportmengen geben, was nicht sein kann).

In unserem Fall: min(3; 1) = 1.

Diese Menge von 1 Einheiten windmen wir nun um (d. h. wir addieren Sie bei den "+ T"-Feldern und subtrahieren sie bei den "- T"-Feldern):

Dann erhalten wir

	E1 7	E2 8	E3 9	E4 12
Lager 1 8	30	60	70	8 10
Lager 2 10	7 15	70	55	3 20
Lager 3 12	45	2 35	9 20	1 30
Rest 6	100	6 100	100	100

aktuelle Kosten: 1088

vorher: 1093

Differenz: -5 = -5 * 1 = Einsparpotential mal umgewidmete Menge

Ist diese Lösung optimal?

Phase 1: Wir betrachten die besetzten Felder und berechnen die Hilfsgrößen:

c14 - z1 - s4 = 0	10 - z1 - s4 = 0
c21 - z2 - s1 = 0	15 - z2 - s1 = 0
c24 - z2 - s4 = 0	20 - z2 - s4 = 0
c32 - z3 - s2 = 0	35 - z3 - s2 = 0
c33 - z3 - s3 = 0	20 - z3 - s3 = 0
c34 - z3 - s4 = 0	30 - z3 - s4 = 0
c42 - z4 - s2 = 0	100 - z4 - s2 = 0

Wählt man nun beispielsweise z3 = 0 so erhält man

z1 =	-20	s1 =	25
z2 =	-10	s2 =	35
z3 =	0	s3 =	20
z4 =	65	s4 =	30

Phase 2: Wir betrachten die freien Felder und berechnen die Kosteneinsparpotentiale:

c11 - z1 - s1 =	30 - (-20) - 25	25
c12 - z1 - s2 =	60 - (-20) - 35	45
c13 - z1 - s3 =	70 - (-20) - 20	70
c22 - z2 - s2 =	70 - (-10) - 35	45
c23 - z2 - s3 =	55 - (-10) - 20	45
c31 - z3 - s1 =	45 - 0 - 25	20
c41 - z4 - s1 =	100 - 65 - 25	10
c43 - z4 - s3 =	100 - 65 - 20	15
c44 - z4 - s4 =	100 - 65 - 30	5

Da alle Kosteneinsparpotentiale größer oder gleich Null sind, ist diese Lösung optimal.

Ist dies die einzige optimale Lösung?

Ja, da alle Kosteneinsparpotentiale größer als Null sind, ist dies die einzige optimale Lösung, es liegt keine Entartung vor.